Posuv perihelia Merkura a ohyb světla v blízkosti Slunce

Zpracoval: Petr Hruška <hruska@popelka.ms.mff.cuni.cz>
Použitá literatura: skripta RNDr. Leoš Dvořák, CSc.: Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru

Posuv perihelia Merkura

Budeme předpokládat, že Merkur je testovací částice a vyšetřovat jeho pohyb ve Schwarzschildově metrice. Na Merkur nepůsobí prakticky žádné síly, kromě gravitační, takže se pohybuje podle rovnice geodetiky.

$$\frac{DU^\mu}{d\tau} = 0 \tag{1}$$

Odtud dostáváme

$$\frac{DU_\alpha}{d\tau} g^{\alpha\mu} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{DU_\alpha}{d\tau} = 0. \tag{3}$$

Rozepíšeme absolutní derivaci podle definice a dostáváme:

$$0 = \frac{DU_\alpha}{d\tau} = \frac{dU_\alpha}{d\tau} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U_\mu U_\nu, \tag{4}$$

$$\frac{dU_\alpha}{d\tau} = \Gamma^\mu_{\alpha\nu} U_\mu U^\nu. \tag{5}$$

Dosadíme za $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ podle vztahu

$$\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\alpha,\nu} + g_{\sigma\nu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\sigma}) \tag{6}$$

a dále upravujeme.

$$\frac{dU_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\alpha,\nu} + g_{\sigma\nu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\sigma}) U_\mu U^\nu = \frac{1}{2} (g_{\sigma\nu,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\nu} - g_{\alpha\nu,\sigma}) U^\sigma U^\nu \tag{7}$$

Závorku s metrickými tenzory rozložíme na symetrickou (první člen) a antisymetrickou (druhý a třetí člen) část. Tenzor $U^\sigma U^\nu$ je symetrický, takže antisymetrická část závorky dá nulu. Dostáváme tak rovnici geodetiky ve tvaru

$$\frac{dU_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\sigma\nu,\alpha} U^\sigma U^\nu \tag{8}$$

Z rovnice (8) plyne, že nezávisí-li složka metrického tenzoru $g_{\sigma\nu}$ na souřadnici α, tj. $g_{\sigma\nu,\alpha} = 0$, pak $U_\alpha = \text{konst.}$

Pohyb Merkura vyšetřujeme ve Schwarzschildově metrice

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2), \tag{9}$$

tj.

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad g_{11} = \left(\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\right), \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2\theta, \tag{10}$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{pro } \mu \neq \nu, \tag{11}$$

kde $0 = t, 1 = r, 2 = \theta$ a $3 = \varphi$. Je tedy $g_{\sigma\nu,0} = 0$ a $g_{\sigma\nu,3} = 0$.

Tomu odpovídají integrály pohybu, které označíme v souladu s letním semestrem jako:

$$U_0 = U_t = -\tilde{E} \tag{12}$$

$$U_3 = U_\varphi = \tilde{L}. \tag{13}$$

Konstanty $\tilde{L}$ (resp. $\tilde{E}$) mají význam momentu hybnosti (resp. energie) na jednotku klidové hmoty Merkura.

Dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat (resp. zvolíme souřadnice tak), že se Merkur pohybuje v souřadnicové rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$, čili

$$U^\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \tag{14}$$

$$U_2 = U_\theta = g_{\theta\sigma}U^\sigma = g_{\theta\theta}U^\theta = 0 \tag{15}$$

Poslední složku čtyřrychlosti U^r můžeme určit pomocí vztahu $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1$.

Z relace $\delta^\alpha_\beta = g^\alpha_\sigma g^\sigma_\beta$ a diagonality $g_{\mu\nu}$ dostáváme

$$g^{\alpha\alpha} = g^{-1}_{\alpha\alpha}, \tag{16}$$

$$g^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{pro } \mu \neq \nu. \tag{17}$$

$$g^{00}U_0U_0 + g^{11}U_1U_1 + g^{22}U_2U_2 + g^{33}U_3U_3 = -1 \tag{18}$$

$$-\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\tilde{E}^2 + g^{rr}U_r^2 + \frac{1}{r^2}\tilde{L}^2 = -1 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

S využitím $\frac{dr}{d\tau} = U^r = g^{rr}U_r$ po úpravě dostaneme:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(\frac{\tilde{L}^2}{r^2} + 1\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{21}$$

Poslední rovnici vynásobíme výrazem $\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2$, abysme na levé straně získali kvadrát $\frac{dr}{d\varphi}$. Při úpravách na pravé straně využijeme faktu

$$\left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^{-2} = (U^\varphi)^{-2} = (g^{\varphi\varphi}U_\varphi)^{-2} = \left(\frac{1}{r^2}\tilde{L}\right)^{-2} = \frac{r^4}{\tilde{L}^2}. \tag{22}$$

V takto získané rovnici

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{\tilde{L}^2}\left[\tilde{E} - \left(\frac{\tilde{L}^2}{r^2}+1\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right] \tag{23}$$

provedeme substituci $r := \frac{1}{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4\tilde{L}^2}\left[\tilde{E} - \left(\rho^2\tilde{L}^2+1\right)(1-2\rho M)\right] \tag{24}$$

a po úpravě dostáváme

$$(\rho')^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\tilde{L}^2} - \left(\rho^2 + \frac{1}{\tilde{L}^2}\right)(1-2\rho M)\,. \tag{25}$$

Poslední rovnici zderivujeme podle φ

$$2\rho'\rho'' = 2M3\rho^2\rho' - 2\rho\rho' + \frac{1}{\tilde{L}^2}2M\rho' \tag{26}$$

a po vykrácení $2\rho'$ dostaneme

$$\rho'' + \rho = \frac{M}{\tilde{L}^2} + 3M\rho^2, \tag{27}$$

což je Binetův vzorec pro relativistický případ.

Diferenciální rovnici (27) budeme řešit přibližně. Nejprve si všimneme, že poslední výraz na pravé straně je možno rozepsat jako

$$3M\rho^2 = \frac{3}{2}\frac{2M}{r}\rho = \frac{3}{2}\frac{r_g}{r}\rho, \tag{28}$$

kde $r_g = 2M$ je gravitační poloměr slunce.

Zlomek $\frac{r_g}{r}$ je řádově velikosti 10^{-7}, proto se poslední člen pokusíme zanedbat.

Řešením rovnice

$$\rho'' + \rho = \frac{M}{\tilde{L}^2} \tag{29}$$

$$\rho_{(0)} = A\cos\varphi + \rho_0, \tag{30}$$

kde $\rho_0 = \frac{M}{\tilde{L}^2}$. Vyjádřením $r = \frac{1}{\rho}$ z (30) však dostaneme rovnici kuželosečky

$$r = \frac{1}{A\cos\varphi + \rho_0}, \tag{31}$$

která žádný posun perihelia nemá a odpovídá newtonovskému řešení. Zdá se, že jsme zanedbávali příliš. Pokusíme se tedy vylepšit řešení malou korekcí:

$$\rho = \rho_{(0)} + \rho_{(1)}. \tag{32}$$

V rovnici (27) budeme aproximovat pravou stranu pomocí přibližného řešení (30):

$$\rho'' + \rho = \frac{M}{\tilde{L}^2} + 3M\rho_{(0)}^2. \tag{33}$$

Dosazením z (32) a malou úpravou dostaneme

$$\rho''_{(1)} + \rho_{(1)} = 3M(A\cos\varphi + \rho_0)^2. \tag{34}$$

Tato rovnice (jak si laskavý čtenář jistě sám hravě s radostí ověří) má řešení:

$$\rho_{(1)} = 3M\rho_0^2 + 3M\rho_0 A\varphi\sin\varphi. \tag{35}$$

Odtud dostáváme:

$$\rho = \rho_{(0)} + \rho_{(1)} = A\cos\varphi + \rho_0 + 3M\rho_0^2 + 3M\rho_0 A\varphi\sin\varphi. \tag{36}$$

Ke členu $A\cos\varphi$ vložíme další výraz rovný přibližně jedné $1 \doteq \cos(3M\rho_0\varphi)$ a dále výraz $3M\rho_0\varphi$ v posledním členu nahradíme přibližným ekvivalentem $\sin(3M\rho_0\varphi)$. Dostáváme tak

$$\rho \doteq \rho_0 + 3M\rho_0^2 + A[\cos(3M\rho_0\varphi)\cos\varphi + \sin(3M\rho_0\varphi)\sin\varphi], \tag{37}$$

který můžeme upravit podle vzorce $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$:

$$\rho \doteq \rho_0 + 3M\rho_0^2 + A\cos(\varphi(1 - 3M\rho_0)). \tag{38}$$

Tento výraz je podobný rovnici elipsy (30), s tím rozdílem, že perioda není 2π, ale $2\pi(1-3M\rho_0)$. Na každý oběh Merkura tedy připadá posuv perihelia o $6\pi M\rho_0$ radiánů.

Zbývá určit ρ_0. Z rovnice (31) plyne, že ρ_0 určuje v jistém smyslu velikost elipsy. Minimální vzdálenost Merkura od slunce je dána vztahem

$$r_{min} = \frac{1}{A + \rho_0}, \tag{39}$$

zatímco maximální vzdálenost je dána jako

$$r_{max} = \frac{1}{-A + \rho_0}. \tag{40}$$

Slunce je umístěno v ohnisku elipsy, takže platí $2a = r_{min} + r_{max}$, kde a je velikost hlavní poloosy. Dosazením za r_{min} a r_{max} dostaneme

$$2a = \frac{1}{\rho_0 + A} + \frac{1}{\rho_0 - A} = \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - A^2} = \frac{2r_0}{1 - r_0^2 A^2}. \tag{41}$$

Přepíšeme-li (31),

$$r = \frac{1}{A\cos\varphi + \rho_0} = \frac{\frac{1}{\rho_0}}{\frac{A}{\rho_0}\cos\varphi + 1} = \frac{r_0}{Ar_0\cos\varphi + 1} = \frac{r_0}{e\cos\varphi + 1}, \tag{42}$$

vidíme, že výraz Ar_0 je roven excentricitě elipsy. Dosazením do (41) vyjádříme ρ_0 ve tvaru:

$$\rho_0 = \frac{1}{a(1-e^2)}. \tag{43}$$

Výsledný posun perihelia na jeden oběh Merkura je roven

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi M}{a(1-e^2)} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} \tag{44}$$

Po dosazení tabulkových hodnot dojdeme k hodnotě 43"/stol., což v rámci chyby měření odpovídá pozorovaným hodnotám.

Ohyb světla v blízkosti Slunce

Vyjedeme ze vztahu (27) ve kterém položíme člen $\frac{M}{\tilde{L}^2}$ roven nule. Moment hybnosti na jednotku klidové hmoty $\tilde{L}$ je totiž pro foton nekonečný.

Dostáváme tak Binetův vzorec pro foton:

$$\rho'' + \rho = 3M\rho^2, \tag{45}$$

kterou opět budeme řešit jen přibližně. Postup řešení bude velmi podobný jako v případě Merkura.

Nejprve zanedbáme člen na pravé straně a nahradíme ho nulou. Získáme tak nultou aproximaci

$$\rho_{(0)} = \rho_0 \cos\varphi. \tag{46}$$

Upravíme-li tento vztah, dostaneme

$$r_0 = r_{(0)} \cos\varphi. \tag{47}$$

Odtud je vidět, že řešení odpovídá pohybu fotonu po přímce. r_0 je vzdálenost dráhy fotonu od středu Slunce a $r_{(0)}$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku tvořeného fotonem, středem Slunce a nejbližším bodem ke Slunci na dráze fotonu.

Stejně jako v případě Merkura dosadíme řešení $\rho_{(0)}$ na pravou stranu rovnice (45) a místo ρ na levé straně dosadíme součet $\rho_{(0)}$ a malé korekce $\rho_{(1)}$:

$$\rho''_{(0)} + \rho''_{(1)} + \rho_{(0)} + \rho_{(1)} = 3M\rho^2_{(0)}. \tag{48}$$

Úpravou dojdeme k rovnici

$$\rho''_{(1)} + \rho_{(1)} = 3M\rho_0^2 \cos^2\varphi. \tag{49}$$

Přesné řešení této rovnice je

$$\rho_{(1)} = 2M\rho_0^2 - M\rho_0^2 \cos^2\varphi. \tag{50}$$

Přibližné řešení rovnice (45) je tedy:

$$\rho = \rho_{(0)} + \rho_{(1)} = \rho_0 \cos\varphi + 2M\rho_0^2 - M\rho_0^2 \cos^2\varphi. \tag{51}$$

Zajímá nás, pro které úhly bude foton velmi (nekonečně) vzdálený od Slunce. Pokud by nenastal žádný ohyb, byl by rozdíl úhlů 180°. Pro foton vzdalující se do nekonečna klesá $\rho = 1/r$ k nule. V řešení (51) tedy položíme pravou stranu rovnou nule:

$$0 = \rho_0 \cos\varphi + 2M\rho_0^2 - M\rho_0^2 \cos^2\varphi. \tag{52}$$

Budeme nejprve uvažovat foton vzdalující se do nekonečna. Z úvah o významu řešení $\rho_{(0)}$ víme, že hledaný úhel bude blízký hodnotě $\frac{\pi}{2}$. Použijeme přepis

$$\cos\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \equiv \sin\varepsilon, \tag{53}$$

kde ε je odchylka od přímého směru fotonu a dostáváme

$$0 = \rho_0 \sin\varepsilon + 2M\rho_0^2 - M\rho_0^2 \sin^2\varepsilon. \tag{54}$$

Vzhledem k tomu, že ε je malá hodnota, můžeme nahradit $\sin\varepsilon \doteq \varepsilon$:

$$0 = \rho_0\varepsilon + 2M\rho_0^2 - M\rho_0^2\varepsilon^2. \tag{55}$$

Nakonec ještě zanedbáme poslední člen na pravé straně a pak hravě vyjádříme ε:

$$\varepsilon = -2M\rho_0^2 \tag{56}$$

a odtud můžeme zpětně vyjádřit φ

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \frac{\pi}{2} + 2M\rho_0^2 \tag{57}$$

Pravá strana rovnice (51) nemění svoji hodnotu při změně znaménka φ, takže druhé řešení, odpovídající přilétajícímu fotonu, je

$$\varphi_2 = -\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} - 2M\rho_0^2. \tag{58}$$

Odečtením úhlů a porovnáním s hodnotou $180° = \pi\mathrm{rad}$ získáme hledanou odchylku od přímého směru:

$$\Delta = \varphi_1 - \varphi_2 - \pi = \pi + 4M\rho_0^2 - \pi = \frac{4GM_\odot}{c^2 r_0}. \tag{59}$$

Po dosazení hmotnosti a poloměru Slunce dojdeme k odchylce 1,75", což odpovídá pozorování. Chyba měření je však i v dnešní době poměrně velká (řádově desítky procent).